CONCOURS TA A EPREUVES COMMUNES

ENS Cachan - ENSAIS B - ENSAIT - ENSIETA - ESEM - ESIM - ISEP - ITECH
CONCOURS COMMUN ENSAM - CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

MATHEMATIQUES 1

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé dans cette épreuve.

PARTIE I

On rappelle que $Tr(M)=\sum_{k=1}^{n} m_{kk}$ est la trace d'une matrice $M=[m_{ij}]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on demande de redémontrer les résultats suivants :

1. Démontrer que $Tr(MN)=Tr(NM)$, pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que $Tr(P^{-1}MP)=Tr(M)$, si P est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (distinctes ou non) ; rappeler les résultats de cours concernant la réduction d'une matrice symétrique réelle, et démontrer que $Tr(M)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$.

PARTIE II

$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel, noté $<|>$, pour lequel la base canonique $(e_1,\ldots,e_n)$ est orthonormée. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$, vérifiant $<f(x)|y> = <x|f(y)>$ pour tous vecteurs x et y. On note M la matrice symétrique réelle de l'endomorphisme f, relativement à la base canonique. On suppose dans cette partie que la trace de f (égale à $Tr(M)$) est nulle.

1. Montrer qu'il existe au moins un vecteur x non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que $<x|f(x)>=0$ (on pourra déterminer ce vecteur par ses coordonnées dans une base orthonormée de vecteurs propres de f).
2. On suppose que $n=2$. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice $M'=[m'_{ij}]$ de f a une diagonale nulle $(m'_{11}=m'_{22}=0)$.
3. On suppose que $n=3$. En utilisant les deux questions précédentes, montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice $M'=[m'_{ij}]$ de f a une diagonale nulle $(m'_{11}=m'_{22}=m'_{33}=0)$.

PARTIE III

Dans cette partie, on se place dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure affine canonique, et $\mathcal{R}_0(O, e_1, e_2)$ est un repère orthonormé.

$M=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ est une matrice symétrique non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2$, $U=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et E est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$, de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}_0$, tels que ${}^tUMU=0$.

1. En explicitant le produit matriciel ${}^tUMU$, donner les équations cartésiennes de E dans le repère $\mathcal{R}_0$, et dans un repère orthonormé $\mathcal{R}_1(O, e'_1, e'_2)$, où (e'_1, e'_2) est une base de vecteurs propres de M.

2. Montrer que si les valeurs propres de M sont non nulles et de signes contraires, E est la réunion de 2 droites. Préciser la nature géométrique de E dans les autres cas.

3. Montrer que E est une réunion de 2 droites orthogonales si et seulement si $Tr(M)=0$.

4. Dans le repère $\mathcal{R}_0$, soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $x^2-2y=0$, et $A(x_0,y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$ tel que $x_0^2-2y_0>0$.

   4.1. Soit α un nombre réel ; donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la droite de pente α passant par A coupe $\mathcal{P}$ en un point unique.

   4.2. On se place maintenant dans le repère $\mathcal{R}_2\,(A, e_1, e_2)$. Donner dans ce repère l'équation de la réunion des 2 tangentes à $\mathcal{P}$ issues de A, équation que l'on présentera sous la forme ${}^tU\,M\,U=0$, en explicitant la matrice M.

   4.3. Quel est l'ensemble $\mathcal{D}$ des points A d'où l'on peut mener 2 tangentes orthogonales à $\mathcal{P}$? Reconnaître cet ensemble vis-à-vis de la courbe $\mathcal{P}$.

   4.4. Représenter $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sur un même graphique (unité : 2 cm), ainsi qu'un point quelconque A de $\mathcal{D}$ avec ses 2 tangentes à $\mathcal{P}$ orthogonales.

PARTIE IV

Dans cette partie, on se place dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure affine canonique, et $\mathcal{R}_0\,(O, e_1, e_2, e_3)$, est un repère orthonormé. M est une matrice symétrique <u>*non nulle*</u> de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, $U=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et E est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$, de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}_0$, tels que ${}^tU\,M\,U=0$.

1. Ecrire une équation cartésienne de E dans un repère $\mathcal{R}_1$ bien choisi, et discuter la nature géométrique de E en fonction des valeurs propres de M.

2. En utilisant la question II.3, montrer que l'ensemble E contient 3 droites 2 à 2 orthogonales si et seulement si $Tr(M)=0$.

3. Soient A, B et C les 3 points de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées respectives (1, 0, 0), (0, 1, 0) et $(0, 0, \sqrt{2}+\sqrt{3})$ dans le repère $\mathcal{R}_0$.

   3.1 Donner une équation du plan ABC et une équation de la sphère $OABC$.

   3.2. En déduire une équation du cône elliptique de sommet O, et de directrice le cercle circonscrit au triangle ABC. Vérifier que ce cône contient 3 génératrices 2 à 2 orthogonales.

4. On appelle $\mathcal{C}$ le cône d'équation $xy+\sqrt{3}(x+y)z=0$.

   4.1. Donner une équation du plan tangent à $\mathcal{C}$ au point C.

   4.2. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x+y=\sqrt{2}$. Quelle est la nature de la courbe intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{P}_1$? Représenter graphiquement cette courbe dans un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}_1$ (unité : 1 cm). (On pourra effectuer un changement de repère).

4.3. Trouver une base orthonormée (e'_1, e'_2, e'_3) de vecteurs propres de la matrice $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$.

5. Dans cette question, l'espace est rapporté au repère $\mathcal{R}_1(O, e'_1, e'_2, e'_3)$. Soit $\mathcal{C}'$ le cône d'équation $X^2 + 2Y^2 - 3Z^2 = 0$ dans ce repère. Montrer qu'il est possible de choisir (e'_1, e'_2, e'_3) telle que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$

5.1. Quelle est la nature géométrique des sections de $\mathcal{C}'$ par les plans d'équations $Y = \sqrt{2}/2$ et $Z = \sqrt{3}/3$?

5.2. En remarquant que $X^2 + 2Y^2 - 3Z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + (Y - 2Z)(Y + 2Z)$, déterminer la nature géométrique des sections de $\mathcal{C}'$ par les plans d'équations $Y - 2Z = h$ et $Y + 2Z = k$ (h et k réels non nuls). Existe-t-il une valeur de h ou de k pour laquelle cette section est le cercle circonscrit au triangle ABC ?

PARTIE V

Dans le repère $\mathcal{R}_0$, soit $\mathcal{Q}$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - 2z = 0$ et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$ tel que $x_0^2 + y_0^2 - 2z_0 > 0$.

1. Quelle est la nature géométrique de $\mathcal{Q}$?

2. Soient u, v, w les coordonnées d'un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$; donner une condition nécessaire et suffisante pour que la droite passant par A et de vecteur directeur (u, v, w) coupe $\mathcal{Q}$ en un point unique.

3. On dira qu'une droite est tangente à $\mathcal{Q}$ si elle n'admet pas e_3 pour vecteur directeur, et si elle coupe $\mathcal{Q}$ en un point unique. Montrer que le cône circonscrit à $\mathcal{Q}$ de sommet A, réunion des droites issues de A et tangentes à $\mathcal{Q}$, est un cône elliptique dont on donnera une équation dans le repère $\mathcal{R}_2(A, e_1, e_2, e_3)$, sous la forme ${}^tUMU = 0$, en précisant la matrice M.

4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des points d'où l'on peut mener 3 droites 2 à 2 orthogonales et tangentes à $\mathcal{Q}$. Quelle est la nature géométrique de $\mathcal{S}$?

5. Montrer que le point D de coordonnées (0, 0, -1/4) dans $\mathcal{R}_0$ appartient à $\mathcal{S}$, et déterminer une équation du cône $\mathcal{T}$ de sommet D circonscrit à $\mathcal{Q}$. Trouver trois vecteurs V_1, V_2, V_3, 2 à 2 orthogonaux, tels que les trois droites issues de D de vecteurs directeurs V_1, V_2, V_3 soient des génératrices de $\mathcal{T}$. Préciser la nature géométrique de l'intersection de $\mathcal{Q}$ avec $\mathcal{T}$.